1968: Olivetti - NASA, una storia da raccontare

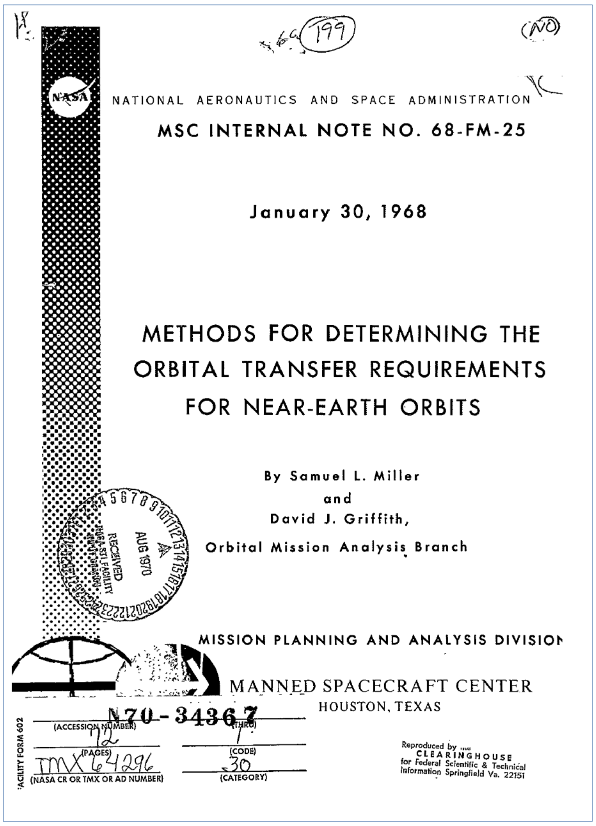
Norberto Patrignani

in collaborazione con
Laboratorio-Museo Tecnologic@mente - L'Innovazione Olivetti

Sommario
Questo articolo parla di una storia vera. La storia dell'uso della Olivetti P101, il primo Personal Computer della storia dell'informatica, alla NASA, l'agenzia spaziale statunitense, nell'ambito del Programma Apollo. Nell'esempio descritto, la Olivetti P101 svolge un ruolo fondamentale nel calcolo delle manovre di cambiamento di orbita e rendez-vous delle navicelle spaziali.

1. Introduzione

Questo lavoro nasce nel cuore di Ivrea, al *Laboratorio-Museo Tecnologic@mente - L'Innovazione Olivetti* (un progetto della Fondazione Natale Cappellaro) proprio in quei luoghi dove è nata la *Olivetti P101* (Perotto, 2015). Qui diverse generazioni di persone, che hanno dedicato alle tecnologie digitali buona parte della loro vita, si incontrano regolarmente per raccontare l'affascinante storia industriale della *Olivetti* a tutte le generazioni e con linguaggi diversi: dall'arte al design, dalla scienza alla tecnologia. Si fanno passeggiate tra le architetture Olivettiane (oggi "*Ivrea, città industriale del XX secolo*" è il nome con il quale Ivrea è stata inserita nella lista dei patrimoni dell'umanità dall'UNESCO), giochi, "palestre del pensiero" e attività didattiche.
Qui si incontrano Gastone Garziera, Giovanni De Sandre, Giuliano Gaiti (mancato recentemente) del team storico di progetto della *Olivetti P101* diretto nel 1963 dall'Ing.Piero Giorgio Perotto (1930-2002), e persone più giovani (ma non di molto) che hanno contribuito insieme a loro a questo articolo. Alcune hanno avuto proprio Garziera e De Sandre come responsabili alla Ricerca e Sviluppo Olivetti negli anni '70 del secolo scorso.
Un giorno del 2019 Garziera e De Sandre portano un documento della NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) del 1968 (Miller e Griffith, 1968) (vedi fig.1). Da quel giorno, con frequenza "aperiodica" si ritrovano a discutere di come poter raccontare con un linguaggio semplice ma rigoroso quel documento storico anche utilizzando i preziosi appunti di Giuliano Gaiti.


NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION

MSC INTERNAL NOTE NO. 68-FM-25

January 30, 1968

METHODS FOR DETERMINING THE
ORBITAL TRANSFER REQUIREMENTS
FOR NEAR-EARTH ORBITS

By Samuel L. Miller
and
David J. Griffith,
Orbital Mission Analysis Branch

MISSION PLANNING AND ANALYSIS DIVISION

MANNED SPACECRAFT CENTER
HOUSTON, TEXAS

N70-34367

Reproduced by the CLEARINGHOUSE for Federal Scientific & Technical Information Springfield Va. 22151

fig.1 - Documento della NASA che descrive l'uso della Olivetti P101 (Miller e Griffith, 1968)

In questo articolo, come esempio, viene descritto ed esplorato in dettaglio il "*Program 1*" della NASA riportato a pag.13 del documento stesso (vedi fig.2).

Il *programma Apollo* è universalmente noto come il progetto spaziale statunitense culminato con lo sbarco di un essere umano sulla Luna il 20 Luglio 1969. Quel giorno Neil Armstrong e Buzz Aldrin mettono piede sulla Luna e Michael Collins li aspetta restando in orbita lunare per poi ritornare insieme sulla Terra (Brooks, Grimwood, Swenson, 1979).
Le tecnologie digitali hanno svolto un ruolo fondamentale nel *programma Apollo*: dal software di bordo della navicella spaziale, scritto da Margaret Hamilton, nota come la prima *software engineer* della storia (NASA, 2010), alle ricerche sui primi circuiti integrati. Forse meno noto è l'utilizzo della *Olivetti P101* alla NASA nell'ambito del *programma Apollo*.

Le caratteristiche principali della *Olivetti P101* sono: la sua *portabilità*, *programmabilità* (il suo linguaggio di programmazione permette il "salto condizionato", essenziale per implementare i tre costrutti fondamentali "sequenza", "bivio", "ciclo", necessari per la codifica di qualsiasi algoritmo) e *interattività* (input e output disponibili direttamente all'utente tramite tastiera e stampante). Inoltre, novità assoluta per l'epoca, permette di salvare i programmi e i dati in comode schedine magnetiche tascabili (Olivetti, 1965). Per tutto questo, viene unanimemente riconosciuto come il primo *Personal Computer* della storia, come scrive il 15 Ottobre del 1965 il *Wall Street Journal,* dopo la prima apparizione al padiglione Olivetti alla manifestazione della *Business Equipment Manufacturers Association* (BEMA) di New York del 1965 (WSJ, 1965).

13

INSTRUCTION LISTING OF PROGRAM 1

AV	b‡	bX	R*	R◊
a↑	b÷	B÷	R÷	R+
R‡	A÷	b‡	R÷	R−
r↓	−	A+	R−	R↓
R+	A÷	B−	R*	R↓
R+	C↑	b‡	R↑	rX
D‡	b÷	b÷	r÷	R÷
b↑	c‡	A÷	D−	RS
S	B÷	b↑	÷	DX
↓	c−	−	AX	c↑
b+	a↑	A√	B↑	c÷
B‡	r↓	CX	a↑	C‡
S	R−	S	d↓	C−
↓	R÷	X	‡	cX
b+	R↑	b‡	−	A◊
b‡	DX	A√	A√	b↓
S	X	CX	B‡	cX
+	A√	C‡	S	B‡
b+	C‡	S	X	B−
a↑	AX	↓	B‡	A◊
d↑	A÷	a↑	X	V
c↑	−	R↓	a↑	
c÷	bX	R−	RX	

fig.2 - Istruzioni in linguaggio di programmazione della Olivetti P101 del Program1 della NASA fonte: (Miller e Griffith, 1968, pag.13)

Perché la NASA adotta la *Olivetti P101* per il suo *programma Apollo*?
La risposta si trova nel documento principale della NASA che ha ispirato questo articolo (vedi fig.1).
Infatti il viaggio di andata e ritorno dalla Terra alla Luna richiede molti aggiustamenti di orbita (vedi fig.3).

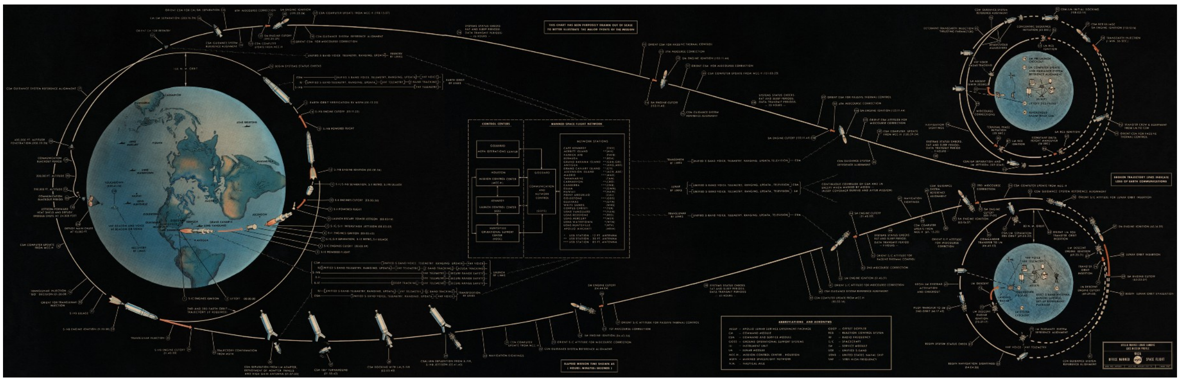


fig.3 - Manned Lunar Landing Mission Profile (NASA, 1967) - fonte: wikimedia commons

Nel documento della NASA si spiega dettagliatamente che durante le fasi di test del progetto Apollo sono richieste molte manovre di cambio di orbita e di rendez-vous e quindi:

> "...*This suggests a **need for a method that quickly and accurately** estimates the changed maneuver. This document provides both a graphical (plots) and an analytical method (**Olivetti programs**) for estimating the **delta V** requirements for the orbital transfer maneuvers*" (Miller e Griffith, 1968, pag.6).

In altre parole, per questi test nasce la necessità di avere un metodo che ***rapidamente*** (vedi l'*interattività* fornita dalla *Olivetti P101*) e ***accuratamente*** (vedi la precisione della *Olivetti P101* fino a nove cifre decimali) permetta il calcolo analitico delle variazioni di velocità richieste per le manovre di cambio di orbita.
Nel presente lavoro ci si concentra proprio nel calcolo di ΔV , in particolare delle due variazioni della velocità ΔV_x e ΔV_z necessarie a portare il satellite dall'orbita attuale ad una nuova orbita ellittica (per un approfondimento sulla geometria dell'ellisse vedi ***Appendice 1***).

2. Il *Program 1* della NASA (analisi)

Prima di entrare nei dettagli del *Program 1* si può sintetizzare il suo scopo principale:

- in ***input*** al programma (con le istruzioni "S" della *Olivetti P101*) vengono forniti:

h (attuale distanza dalla superficie della Terra, in *nautical miles*, **n.mi.**);

V_1 (velocità attuale tangente alla traiettoria ellittica, in *feet per second*, **fps**);

γ_1 ("*flight-path angle*" attuale, angolo tra la velocità V_1 tangente alla traiettoria attuale e la normale al vettore posizione, in gradi sessagesimali, vedi fig.4);

la nuova orbita ellittica richiesta viene semplicemente indicata con

h_p (distanza dalla superficie della Terra al *perielio* della nuova orbita ellittica, in **n.mi.**);

h_a (distanza dalla superficie della Terra all'*afelio* della nuova orbita ellittica, in **n.mi.**);

- in ***output*** il programma fornisce tramite l'istruzione di stampa:

ΔV_x (variazione della velocità sull'asse x in **fps**)

ΔV_z (variazione della velocità sull'asse z in **fps**).

Ad esempio (tratto dal documento NASA) fornendo in input i dati di posizione, velocità e angolo di volo attuali:

h= 175 n.mi. (324,1 Km)
V_1= 25291 fps (27751,3 Km/h)
γ_1= 0,898924°

e la nuova orbita ellittica richiesta con distanza al *perielio* e all'*afelio*:
h_p= 121 n.mi. (224,1 Km)
h_a= 277 n.mi. (513,0 Km)

il *Program 1* fornisce in output:

ΔV_x = **98,6026 fps** (108,1 Km/h)

ΔV_z = **-120,9121 fps** (-132,67 Km/h).

Dall'esempio si vede l'importanza della precisione di calcolo fino a nove cifre decimali.

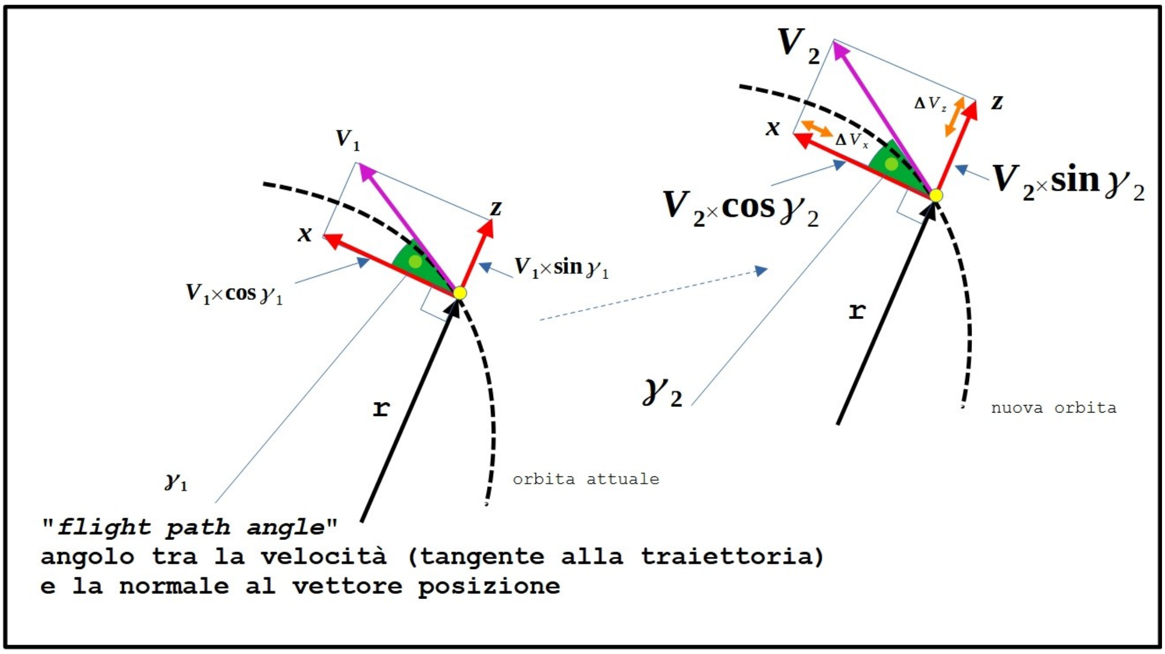


fig.4 - Flight-path angle γ_1 *, velocità* V_1 *tangente e sue componenti* x , z

Nel *Program 1* della NASA vengono utilizzate alcune costanti:

r_E = **3441,3** $(n.mi.)$ raggio della Terra in *nautical miles* **n.mi.**

μ = **62751** $\frac{(n.mi.)^3}{s^2}$ costante gravitazionale della Terra

C_{RG} = **57,29577951°** fattore di conversione da **radianti** a **gradi**

C_{nf} = **6076,115486** $(ft/n.mi.)$

fattore di conversione
dai **n.mi./s**
ai *feet per second* (**fps**)

per la loro definizione vedi ***Appendice 2***.

Il *Program 1* inizia con l'input di $\boldsymbol{h}$ (attuale distanza dalla **superficie** della Terra, in *nautical miles*, **n.mi.**) e per calcolare $\boldsymbol{r}$ la distanza dal **centro** della **Terra**, somma il raggio della Terra in **n.mi.**:

$$\boldsymbol{r = h + r_E = h + 3441{,}1 \ (n.mi.)}$$

Quindi passa al calcolo della nuova orbita ellittica richiesta usando i due parametri forniti in input

- $\boldsymbol{h_p}$ (distanza dalla **superficie** della Terra al *perielio* della nuova orbita ellittica, in **n.mi.**);
- $\boldsymbol{h_a}$ (distanza dalla **superficie** della Terra all'*afelio* della nuova orbita ellittica, in **n.mi.**);

con questi dati calcola la distanza dal **centro** della Terra al *perielio*

$$\boldsymbol{r_p = h_p + r_E = h_p + 3441{,}1 \ (n.mi.)}$$

e la distanza dal **centro** della Terra all'*afelio*

$$\boldsymbol{r_a = h_a + r_E = h_a + 3441{,}1 \ (n.mi.)}$$

quindi calcola il semiasse maggiore $\boldsymbol{a}$ e l'eccentricità $\boldsymbol{e}$ dell'ellisse della nuova orbita (per le formule relative all'ellisse vedi ***Appendice 1***)

$$\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{r_a + r_p})}{2}$$

$$\boldsymbol{e = 1 - \frac{r_p}{a}}$$

Per calcolare le due variazioni della velocità $\boldsymbol{\Delta} V_x$ e $\boldsymbol{\Delta} V_z$ dalla fig.4 si vede che:

$$\boldsymbol{\Delta} V_x = \boldsymbol{V_2 \times \cos} \gamma_2 \ \textbf{-} \ \boldsymbol{V_1 \times \cos} \gamma_1$$

$$\boldsymbol{\Delta} V_z = \boldsymbol{V_1 \times \sin} \gamma_1 \ \textbf{-} \ \boldsymbol{V_2 \times \sin} \gamma_2$$

come riportato a pag.12 del documento della NASA.

V_1 (in **fps**) e γ_1^o (in **gradi**) sono forniti in ingresso al *Program 1.* Per il calcolo di $\sin\gamma_1$ e di $\cos\gamma_1$ si vede facilmente che, dopo aver trasformato γ_1^o in radianti tramite il fattore di conversione C_{RG} (vedi ***Appendice 2***)

$$C_{RG} = 57{,}29577951^o$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{C_{RG}}\gamma_1^o$$

Come noto, per $\gamma_1^o < 5^o$ il valore dell'angolo espresso in radianti si può approssimare al seno dell'angolo stesso:

$$\gamma_1 \approx \sin\gamma_1$$

infatti nel documento della NASA (pag.12) specifica:

> "*This program should not be used when the flight-path angle of either ellipse exceeds 5° at the point of transfer, since a small angle approximation is used for both the sine, and cosine of* γ_1 "

ovvero il programma si può usare solo se la condizione $\gamma_1^o < 5^o$ è vera (vedi ***Appendice 3***).

Quindi una volta ricavato $\sin\gamma_1$ dall'approssimazione:

$$\gamma_1 \approx \sin\gamma_1$$

si ricava facilmente $\cos\gamma_1$ dalle proprietà della circonferenza trigonometrica:

$$\cos\gamma_1 = \sqrt{(1-\sin^2\gamma_1)}$$

Ora si hanno: V_1 (fornito in input in **fps**), $\sin\gamma_1$ e $\cos\gamma_1$ (ricavati da γ_1 fornito in input).
Per il calcolo di ΔV_x e ΔV_z :

$$\Delta V_x = V_2\times\cos\gamma_2 - V_1\times\cos\gamma_1$$

$$\Delta V_z = V_1\times\sin\gamma_1 - V_2\times\sin\gamma_2$$

restano da calcolare la velocità tangenziale V_2 nella nuova orbita e il seno e il coseno del nuovo *flight-path angle*: $\sin\gamma_2$ e $\cos\gamma_2$.

Per calcolare la velocità tangenziale V_2 nella nuova orbita sono sufficienti:
- la distanza dal centro della Terra r (in **n.mi.**),
- il semiasse maggiore a (in **n.mi.**) della nuova orbita ellittica e
- la costante gravitazionale della Terra μ (vedi ***Appendice 2***)

$$\mu = 62751\ \frac{(n.mi.)^3}{s^2}$$

Infatti secondo *una delle formule principali dell'astrodinamica* la velocità tangenziale V_2 è data da (vedi ***Appendice 4***):

$$V_2 = \sqrt{\left(\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\right)}\ (n.mi./s)$$

Per calcolare il nuovo *flight-path angle* γ_2 invece si fa ricorso ad un'altra formula fondamentale dell'astrodinamica che fornisce $\cos\gamma_2$ (vedi ***Appendice 5***) conoscendo:
- il semiasse maggiore a della nuova orbita,
- l'eccentricità e della nuova orbita e
- la posizione r :

$$\cos\gamma_2 = \sqrt{\left(\frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)}\right)}$$

e quindi anche $\sin\gamma_2$:

$$\sin\gamma_2 = \sqrt{(1-\cos^2\gamma_2)} = \sqrt{\left(1-\frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)}\right)}$$

Ora si possono infine calcolare ΔV_x e ΔV_z :

$$\Delta V_x = V_2 \times \cos\gamma_2 - V_1 \times \cos\gamma_1$$

$$\Delta V_z = V_1 \times \sin\gamma_1 - V_2 \times \sin\gamma_2$$

si può così sintetizzare il risultato dell'analisi con il diagramma di flusso (vedi fig.5)

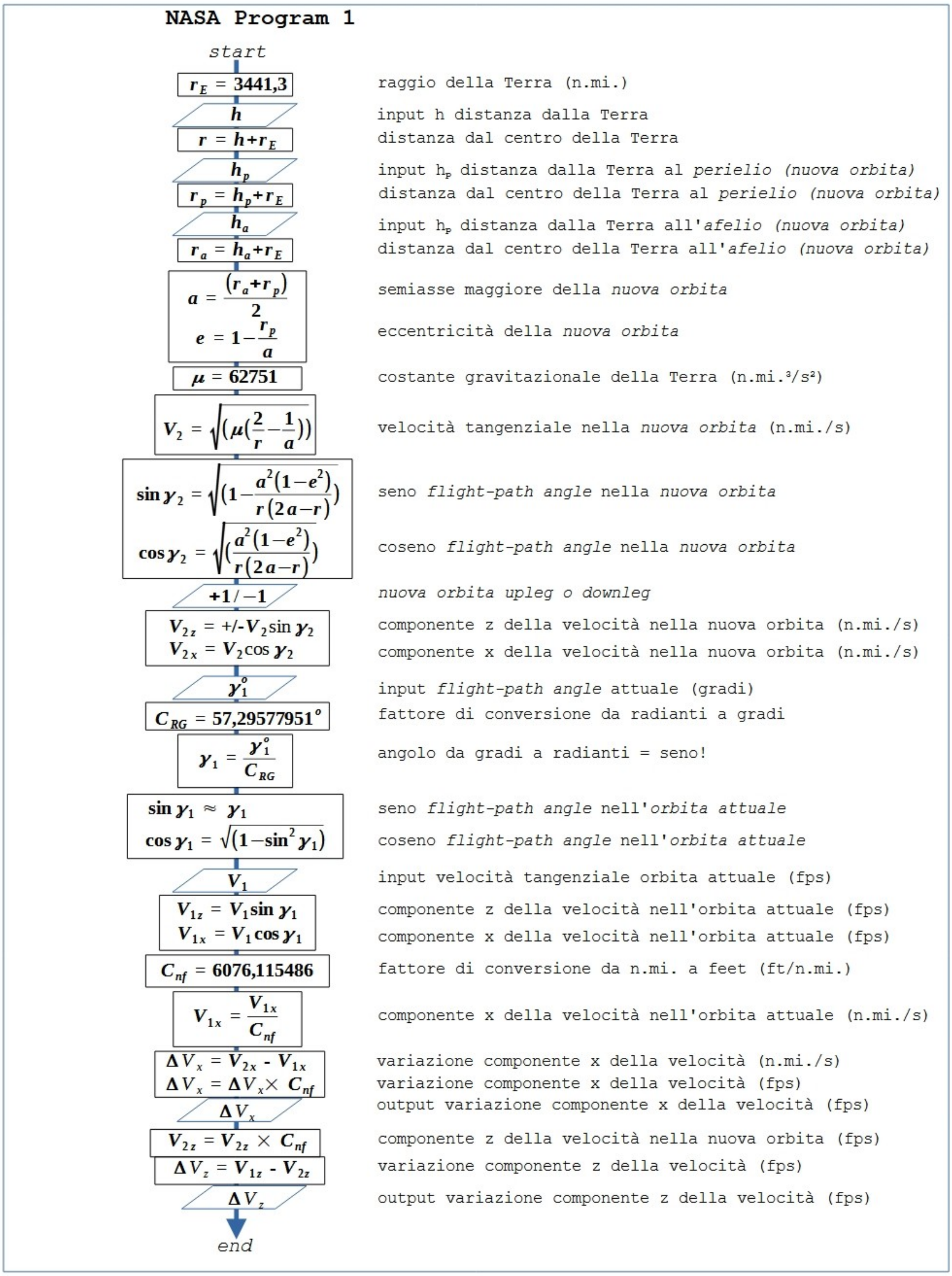
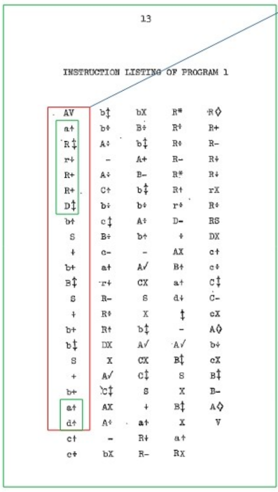


fig.5 - Diagramma di flusso del Program 1

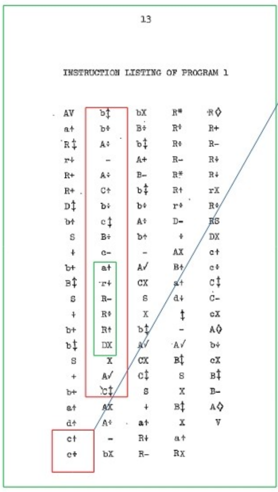
3. Il *Program 1* della NASA (codifica con *Olivetti P101*)

Per descrivere la codifica del *Program 1* dellla NASA in linguaggio di programmazione della *Olivetti P101* si può affiancare l'*INSTRUCTION LISTING OF PROGRAM 1* del documento originale ad una descrizione affiancata ai cambiamenti interni alla macchina tramite i suoi registri (vedi fig.6):

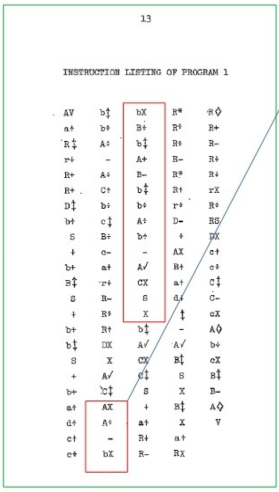


Registri Olivetti P101

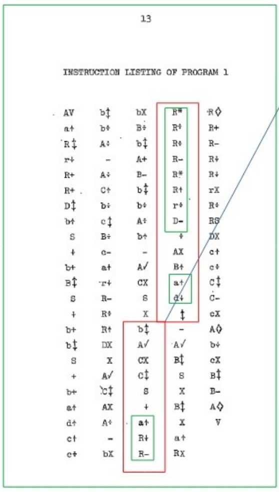
		M	A	B	b	C	c
A V	/* arrivo salto inc. da V						
a ↑	/* INIZIO CODIFICA COSTANTE						
R ↕	/* "3" raggio della Terra r_E						
r ↓	/* "1," in nautical miles n.mi.						
R +	/* "4"						
R +	/* "4"						
D ↕	/* "3" fine costante M=3441,3	3441,3					
b ↑	/* copia M in b = 3441,3 (r_E)				r_E		
S	/* attendi input (h)	h			r_E		
M ↓	/* A = M = (h)	h	h		r_E		
b +	/* A = A + b = ($r=h+r_E$)	h	r		r_E		
B ↕	/* B = A = ($r=h+r_E$)	h		r	r_E		
S	/* attendi input (h_p)	h_p		r	r_E		
M ↓	/* A = M = (h_p)	h_p	h_p	r	r_E		
b +	/* A = A + b = ($r_p=h_p+r_E$)	h_p	r_p	r	r_E		
b ↕	/* b = A = ($r_p=h_p+r_E$) A=b=r_E	h_p	r_E	r	r_p		
S	/* attendi input (h_a)	h_a	r_E	r	r_p		
M +	/* A = A+M = 3441,3+h_a = r_a = h_a+r_E	h_a	r_a	r	r_p		
b +	/* A = A + b = ra + rp		r_a+r_p	r	r_p		
a ↑	/* INIZIO CODIFICA COSTANTE						
d ↑	/* "2" fine costante M=2	2					



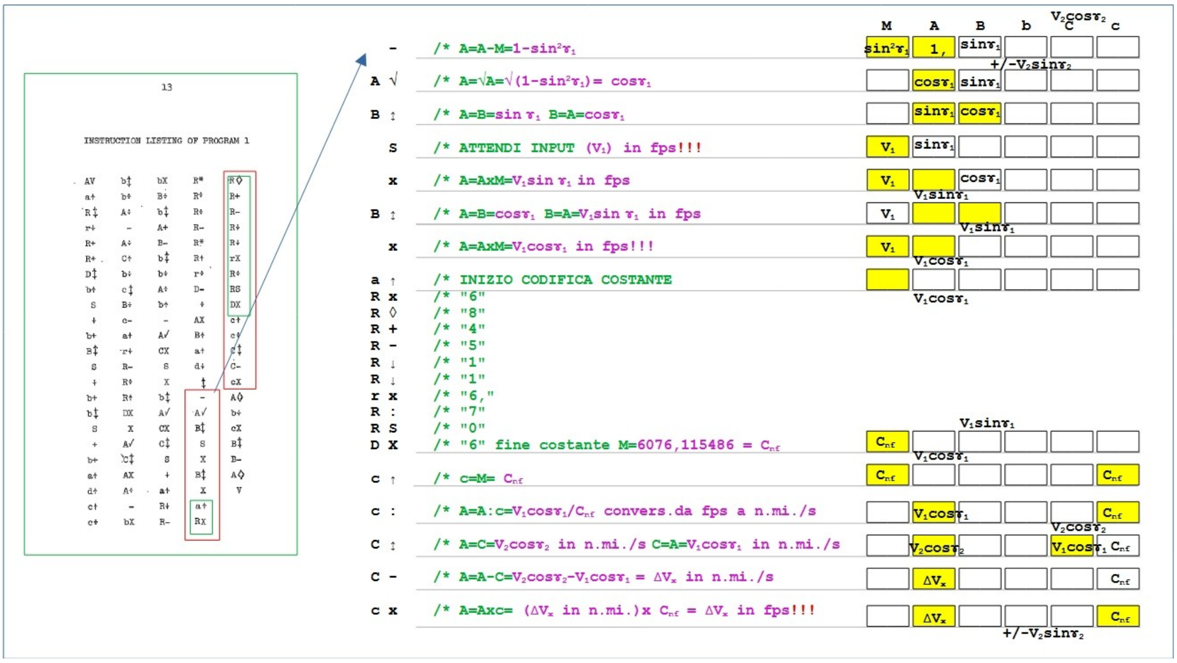
		M	A	B	b	C	c
c ↑	/* c=M=2	2	r_a+r_p	r	r_p		2
c :	/* A = A:c = a=(r_a+r_p)/2		a	r	r_p		2
b ↕	/* A=b= r_p, b=A= a=(r_a+r_p)/2		r_p	r	a		2
b :	/* A=A:b= r_p/a		r_p/a	r	a		2
A :	/* A = A : A = (r_p/a)/(r_p/a)=1 M=r_p/a!!!	r_p/a	1	r	a		2
-	/* A = A - M = e=(1-(r_p/a))	r_p/a	e	r	a		2
A :	/* A = A : A = 1 M= e !!!	e	1	r	a		2
C ↑	/* C=M=e	e	1	r	a	e	2
b :	/* A=A:b=(1/a)	e	1/a	r	a	e	2
c ↕	/* A=C=2 c=A=(1/a)	e	2	r	a	e	1/a
B :	/* A=A:B= (2/r)	e	2/r	r	a	e	1/a
c -	/* A=A-c= (2/r)-(1/a)	e	2/r-1/a	r	a	e	1/a
a ↑	/* INIZIO CODIFICA COSTANTE						
r ↓	/* "1"						
R -	/* "5"						
R :	/* "7"						
R ↑	/* "2"						
D x	/* "6" fine costante M=62751=μ	μ	2/r-1/a	r	a	e	1/a
x	/* A=AxM = μ((2/r)-(1/a))	μ	μ(2/r-1/a)	r	a	e	1/a
A √	/* A=√A=√(μ((2/r)-(1/a)))= V_2 in n.mi./s!!!	μ	V_2	r	a	e	1/a
C ↕	/* A=C=e C=A=V_2	μ	e	r	a	V_2	1/a



		M	A	B	b	C	c
A x	/* A=AxA= e^2	μ	e^2	r	a	V_2	
A :	/* A=A:A=1 M=e^2 !!!	e^2	1	r	a	V_2	
-	/* A = A - M = (1 - e^2)	e^2	$1-e^2$	r	a	V_2	
b x	/* A=Axb= $(1-e^2)a$		$a(1-e^2)$	r	a	V_2	
b x	/* A=Axb= $(1-e^2)a^2$		$a^2(1-e^2)$	r	a	V_2	
B :	/* A=A:B= $(1-e^2)a^2/r$ M=r !!!		$a^2(1-e^2)/r$	r	a	V_2	
b ↕	/* A=a b= $(1-e^2)a^2/r$		a	r	$a^2(1-e^2)/r$	V_2	
A +	/* A=A+A= 2a		2a	r	$a^2(1-e^2)/r$	V_2	
B -	/* A=A-B= 2a-r		2a-r	r		V_2	
b ↕	/* A=b= $(1-e^2)a^2)/r$ b=A= (2a-r)		$a^2(1-e^2)/r$		2a-r	V_2	
b :	/* A=A:b $(1-e^2)a^2/r(2a-r)$		$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$		2a-r	V_2	
A :	/* A=A:A=1 M=$(1-e^2)a^2/r(2a-r)$!!!	$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$	1			V_2	
b ↑	/* b=M= $(1-e^2)a^2/r(2a-r)$	$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$	1		$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$	V_2	
-	/* A=A-M=$1-(1-e^2)a^2/r(2a-r)$		$1-a^2(1-e^2)/r(2a-r)$		$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$	V_2	
A √	/* A=√A=$\sqrt{(1-(1-e^2)a^2/r(2a-r))}$=$\sin\gamma_2$!!!		$\sin\gamma_2$		$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$	V_2	1/a
C x	/* A=AxC= V_2 x $\sin\gamma_2$ (n.mi./s)		$V_2\sin\gamma_2$		$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$	V_2	
S	/* ATTENDI INPUT M=(+1 |-1)	(+1|-1)	$V_2\sin\gamma_2$		$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$	V_2	
x	/* A=AxM = $+V_2\sin\gamma_2$ | $-V_2\sin\gamma_2$ (n.mi./s)	(+1|-1)	$+/-V_2\sin\gamma_2$		$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$	V_2	



		M	A	B	b	C	c
b ↕	/* A=b, b=A		$a^2(1-e^2)/r(2a-r)$		$+/-V_2\sin\gamma_2$	V_2	
A √	/* A=√A=$\sqrt{(1-e^2)a^2/r(2a-r)}$= $\cos\gamma_2$!!!		$\cos\gamma_2$			V_2	
C x	/* A=AxC= V_2 x $\cos\gamma_2$ (n.mi./s)		$V_2\cos\gamma_2$			V_2	
C ↕	/* A=C=V_2 C=A=$V_2\cos\gamma_2$ (n.mi./s)		V_2			$V_2\cos\gamma_2$	
S	/* ATTENDI INPUT M=(γ_1°) GRADI	γ_1°					
M ↓	/* A = M = (γ_1)	γ_1°	γ_1°				
a ↑	/* INIZIO CODIFICA COSTANTE		γ_1°				
R ↓	/* "1"						
R -	/* "5"						
R *	/* "9"						
R :	/* "7"						
R :	/* "7"						
R -	/* "5"						
R *	/* "9"						
R ↑	/* "2"						
r :	/* "7,"						
D -	/* "5" fine costante M=57,29577951 = C_{RG}	C_{RG}	γ_1°				
:	/* A=A:M=γ_1/C_{RG} γ_1 RADIANTI≈ $\sin\gamma_1$	C_{RG}	$\sin\gamma_1$				
A x	/* A=AxA= $\sin^2\gamma_1$ M= $\sin\gamma_1$	$\sin\gamma_1$	$\sin^2\gamma_1$				
B ↑	/* B=M=$\sin\gamma_1$	$\sin\gamma_1$		$\sin\gamma_1$			
a ↑	/* INIZIO CODIFICA COSTANTE						
d ↓	/* FINE COSTANTE M="1,"	1,	$\sin^2\gamma_1$				
↕	/* A=M=1, M=A=$\sin^2\gamma$	$\sin^2\gamma_1$	1,	$\sin\gamma_1$	$+/-V_2\sin\gamma_2$	$V_2\cos\gamma_2$	



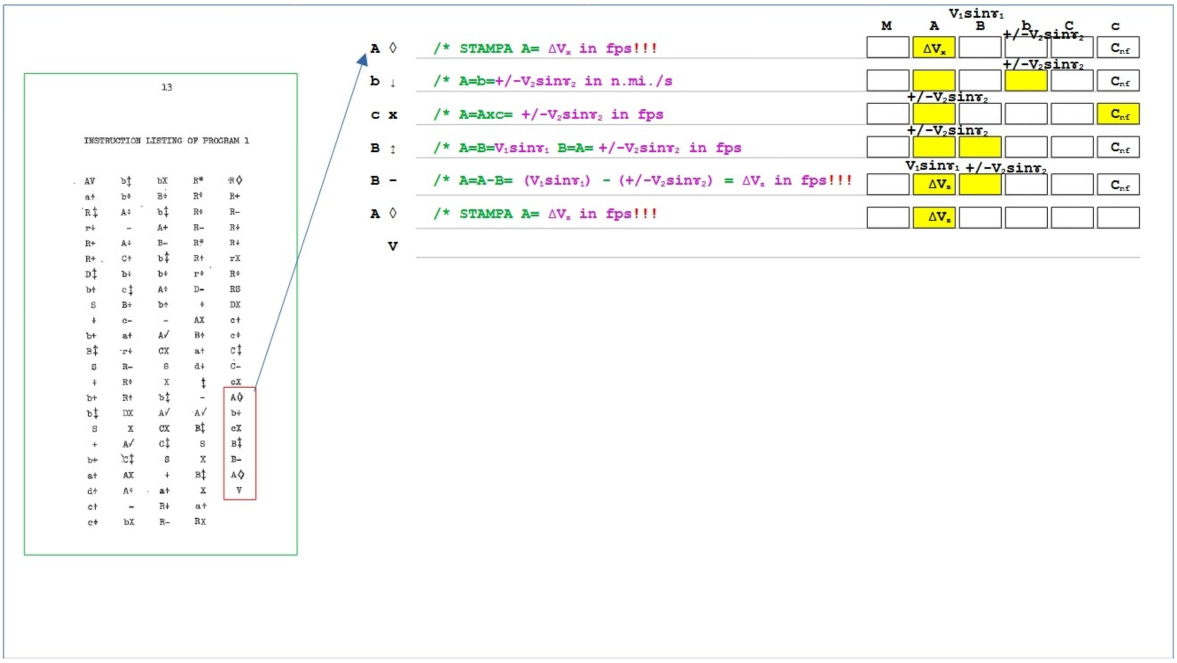


fig.6 - Codifica del Program 1 della NASA

Si può notare un uso molto sofisticato delle istruzioni e dei registri da parte delle persone della NASA che programmavano la *Olivetti P101*.

Appendice 1: Ellisse

L'ellisse è una figura geometrica già nota nell'antichità, infatti era nota ad *Apollonio di Perga* (230 a.C.) e a *Ipazia* (400 d.C.). Viene definita come l'insieme dei punti $P(x,y)$ dove la somma delle distanze dai due "fuochi" F_1 e F_2 è costante:

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = \text{cost}$$

dove i due punti $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ sono i due *fuochi* dell'ellisse (vedi fig.7)

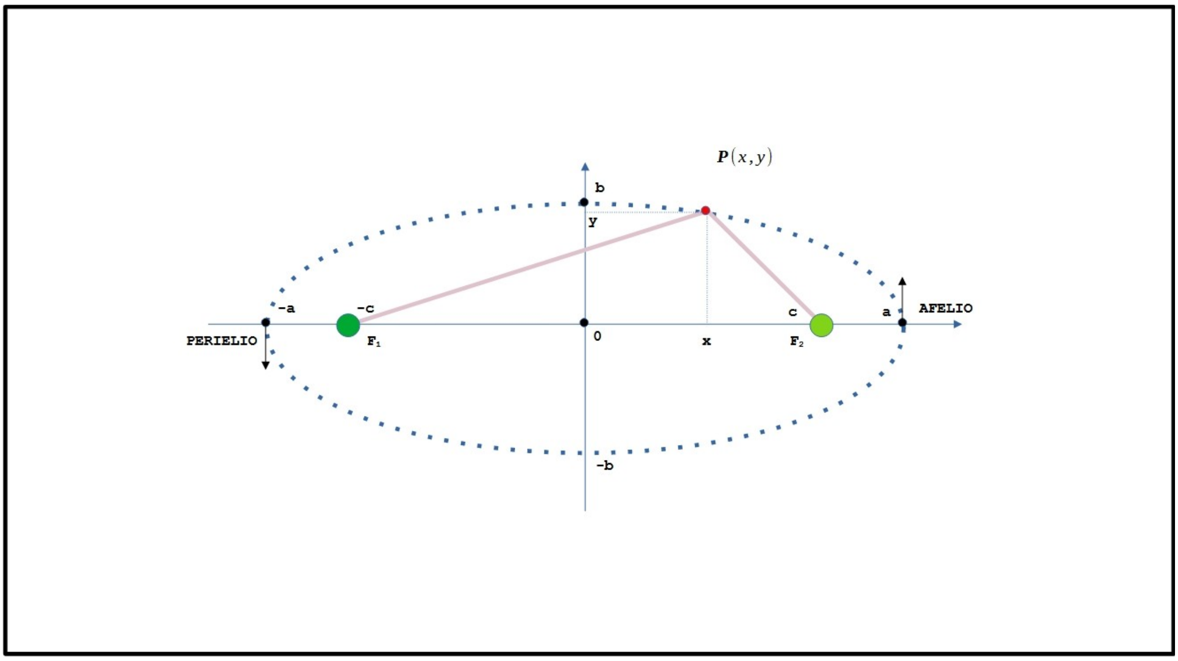


fig.7 - Ellisse con semiasse maggiore a *e semiasse minore* b *fuochi* F_1 *e* F_2

Quando il punto P è all'AFELIO $(0,c)$ si ha

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = \text{cost}$$

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = (|-c|+a)+(a-c) = 2a$$

al PERIELIO

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = (|-a|-|-c|)+(|-a|+c) = 2a$$

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = 2a$$

La somma delle distanze dei punti sull'ellisse dai due fiochi è uguale a $2a$. L'ellisse è una figura geometrica fondamentale in astronomia, infatti le orbite dei corpi celesti sono ellittiche. Dalla *prima legge di Keplero* (Johannes Kepler, 1571-1630, basatosi sulle osservazioni di Tycho Brahe, 1546-1601):

> "*L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse,*
> *di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*"

Per ricavare l'equazione dell'ellisse basta sostituire le coordinate nella

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{[(x-(-c))^2+(y-0)^2]} + \sqrt{[(x-c)^2+(y-0)^2]} = 2a$$

$$\sqrt{[(x+c)^2+y^2]} + \sqrt{[(x-c)^2+y^2]} = 2a$$

$$\sqrt{[(x+c)^2+y^2]} = 2a-\sqrt{[(x-c)^2+y^2]}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + (x-c)^2+y^2 -4a\sqrt{[(x-c)^2+y^2]}$$

$$2xc = 4a^2 - 2xc -4a\sqrt{[(x-c)^2+y^2]}$$

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{[(x-c)^2+y^2]}$$

$$xc-a^2=-a\sqrt{[(x-c)^2+y^2]}$$

$$x^2c^2+a^4-2xca^2=a^2[(x-c)^2+y^2]$$

$$x^2c^2+a^4-2xca^2 = a^2(x^2+c^2-2xc+y^2)$$

$$\frac{(x^2c^2)}{a^2}+a^2-2xc = x^2+c^2-2xc+y^2$$

$$\frac{(x^2c^2)}{a^2}+a^2 = x^2+c^2+y^2$$

$$\frac{(x^2c^2)}{a^2}-x^2-y^2 = c^2-a^2$$

$$\frac{-(x^2c^2)}{a^2}+x^2+y^2 = a^2-c^2$$

$$x^2(1-\frac{c^2}{a^2})+y^2 = a^2-c^2$$

$$x^2\frac{(a^2-c^2)}{a^2}+y^2 = a^2-c^2$$

Quando il punto $P(x, y)$ è in $(0, b)$

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(b^2+c^2)}+\sqrt{(b^2+c^2)} = 2a$$

$$b^2+c^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2-c^2$$

sostituendo:

$$x^2\frac{(a^2-c^2)}{a^2}+y^2 = a^2-c^2$$

$$x^2(\frac{b^2}{a^2})+y^2 = b^2$$

ed ecco l'**equazione dell'ellisse**:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

una delle caratteristiche principali dell'ellisse à l'eccentricità e :

$e=\frac{c}{a}$ con $0\leqslant e\leqslant 1$

per $e=0$ si ha un cerchio: $a=b$,
per $e\rightarrow 1$ l'ellisse si schiaccia sempre più.

Nel caso di orbita ellittica attorno alla Terra (ad es. nel fuoco F_1) si vede facilmente che, indicando con

r_p (distanza dal centro della Terra al *perielio*)
r_a (distanza dal centro della Terra all'*afelio*)
si ha

$$a=\frac{(r_a+r_p)}{2}$$

il semiasse maggiore dell'ellisse è la semidistanza tra *perielio* e *afelio*.
Inoltre l'eccentricità e si può anche esprimere:

$$c=a-r_p \qquad e=\frac{c}{a}=\frac{(a-r_p)}{a}=1-\frac{r_p}{a}$$

Appendice 2: Le costanti del Program 1

1. Raggio della Terra
La prima costante usata dal *Program 1* della NASA è il raggio della Terra espresso in *nautical miles*:

$\boldsymbol{r_E}$ **= 3441,3** $(\boldsymbol{n.mi.})$ raggio della Terra in *nautical miles* **n.mi.**

Infatti il raggio della Terra è

$\boldsymbol{r_E}$**= 6.376.621,2 m**

dato che **1 n.mi. = 1.852 m** per ottenere il raggio della Terra in *nautical miles* basterà dividere per il valore in metri

$$\boldsymbol{r_E = \frac{6.376.621,2}{1.852} = 3441,3\ \text{n.mi.}}$$

Per introdurre una costante nel linguaggio della *Olivetti P101* si fa riferimento al suo *Manuale di Programmazione* (Olivetti, 1965), pag.64. Le costanti numeriche vengono inserite a partire da un codice istruzione speciale "**a** ↑" che indica l'inizio di una costante, i codici successivi vengono interpretati dalla cifra meno significativa alla più significativa secondo la seguente tabella:

```
parte sinistra dell'istruzione
d     fine codifica costante, segno positivo, con virgola
D     fine codifica costante, segno positivo, senza virgola
e     fine codifica costante, segno negativo, con virgola
E     fine codifica costante, segno negativo, senza virgola
r     codifica costante, segno positivo, con virgola
R     codifica costante, segno positivo, senza virgola
f     codifica costante, segno negativo, con virgola
F     codifica costante, segno negativo, senza virgola

parte destra dell'istruzione
S     0
↓     1
↑     2
↕     3
+     4
-     5
x     6
:     7
◊     8
*     9
```

quindi per introdurre la costante raggio della Terra in *nautical miles* le istruzioni in linguaggio P101 saranno:

```
a ↑  /* INIZIO CODIFICA COSTANTE */
R ↕  /* "3"                      */
r ↓  /* "1,"                     */
R +  /* "4"                      */
R +  /* "4"                      */
D ↕  /* "3", FINE COSTANTE       */
```

al riconoscimento dell'istruzione di fine costante, il registro "M" della *Olivetti P101* conterrà la costante inserita `(M=3441,3)` come nel *Program 1* della NASA.

2. Costante gravitazionale della Terra
La seconda a costante usata dal *Program 1* è

$\mu = 62751\ \frac{(n.mi.)^3}{s^2}$ costante gravitazionale della Terra

in altri contesti viene misurata in $\frac{Km^3}{s^2}$

$$\mu = 398600{,}5\ \frac{(Km)^3}{s^2}$$

passando dai Km ai **n.mi.**

$$1\ \text{n.mi.} = 1.852\,m = 1{,}852\,Km$$

$$1\,Km = 0{,}539956803\ \text{n.mi.}$$

$$1\,Km^3 = 0{,}157426214\ (n.mi.)^3$$

$$\mu = 398600{,}5\ \frac{(Km)^3}{s^2} = 398600{,}5 \times 0{,}157426214\ \frac{(n.mi.)^3}{s^2} = 62751\ \frac{(n.mi.)^3}{s^2}$$

quindi per introdurre μ la costante gravitazionale della Terra le istruzioni in linguaggio P101 saranno:

```
a ↑  /* INIZIO CODIFICA COSTANTE */
r ↓  /* "1"                      */
R -  /* "5"                      */
R :  /* "7"                      */
R ↑  /* "2"                      */
D x  /* "6", FINE COSTANTE       */
```

al riconoscimento dell'istruzione di fine costante, il registro "M" della *Olivetti P101* conterrà la costante inserita `(M=62751)` come nel *Program 1* della NASA.

3. Dai gradi ai radianti
La terza costante usata dal *Program 1* è

$C_{RG} = 57{,}29577951^o$ fattore di conversione da **radianti** a **gradi**

infatti nel programma gli angoli di volo γ vengono specificati in gradi sessagesimali α_G , mentre nei calcoli è necessario specificarli in radianti α_R . La costante deriva dalla semplice proporzione:

$$\frac{\alpha_G}{360^o} = \frac{\alpha_R}{(2\pi)}$$

con $\pi \simeq 3{,}14159$ si ha:

$$\alpha_G = \frac{360^o}{(2\pi)}\alpha_R = \frac{360^o}{6{,}28318}\alpha_R = 57{,}29577951^o\alpha_R = C_{RG}\alpha_R$$
$$\alpha_R = \frac{1}{C_{RG}}\alpha_G$$

es.

$$\alpha_R = 1\ (rad) \rightarrow \alpha_G = 57{,}29577951^o$$

$$\alpha_G = 1^o \rightarrow \alpha_R = \frac{1^o}{57{,}29577951^o} = 0{,}017453292\ (rad)$$

Per introdurre la costante $C_{RG} = 57{,}29577951^o$ fattore di conversione da radianti a gradi le istruzioni in linguaggio P101 saranno:

```
a ↑  /* INIZIO CODIFICA COSTANTE */
R ↓  /* "1"                      */
R -  /* "5"                      */
R *  /* "9"                      */
R :  /* "7"                      */
R :  /* "7"                      */
R -  /* "5"                      */
R *  /* "9"                      */
R ↑  /* "2"                      */
r :  /* "7,"                     */
D -  /* "5", FINE COSTANTE       */
```

al riconoscimento dell'istruzione di fine costante, il registro "M" della *Olivetti P101* conterrà la costante inserita `(M=57,29577951)`.

4. Dai nautical miles/s (m.mi./s) ai feet-per-second (fps)
La quarta costante usata dal *Program 1* è

C_{nf} = **6076,115486** $(ft/n.mi.)$ fattore di conversione da **n.mi./s** a *feet per second* (**fps**)

passando dai $(n.mi.)$ ai feet (e quindi fai **n.mi./s** ai **fps**)

$$\mathbf{1}\ (n.mi.) = \mathbf{0{,}6076115486} \times \mathbf{10^{-4}} = \mathbf{6076{,}115486}\ ft$$

Per introdurre la costante C_{nf} = **6076,115486** $(ft/n.mi.)$ fattore di conversione dai **n.mi./s** ai *feet-per-second* (**fps**) le istruzioni in linguaggio P101 saranno:

```
a ↑  /* INIZIO CODIFICA COSTANTE */
R x  /* "6"                      */
R ◊  /* "8"                      */
R +  /* "4"                      */
R -  /* "5"                      */
R ↓  /* "1"                      */
R ↓  /* "1"                      */
r x  /* "6,"                     */
R :  /* "7"                      */
R S  /* "0"                      */
D X  /* "6", FINE COSTANTE       */
```

al riconoscimento dell'istruzione di fine costante, il registro "M" della *Olivetti P101* conterrà la costante inserita (`M=6076,115486`).

Appendice 3: relazione tra γ e $\sin\gamma$ per piccoli angoli

Dalle tavole trigonometriche si vede che per piccoli angoli in effetti l'angolo espresso in radianti approssima molto bene il seno dell'angolo:

$$\sin\gamma_1 \approx \gamma_1$$

γ_1^o	γ_1	$\sin\gamma_1$
0	0	0
1	0,01745	0,01745
2	0,03490	0,03490
3	0,05235	0,05234
4	0,06981	0,06976
5	0,08726	0,08716

come pure osservando il grafico delle funzioni $y = x$ e $y = \sin x$ vicino all'origine:

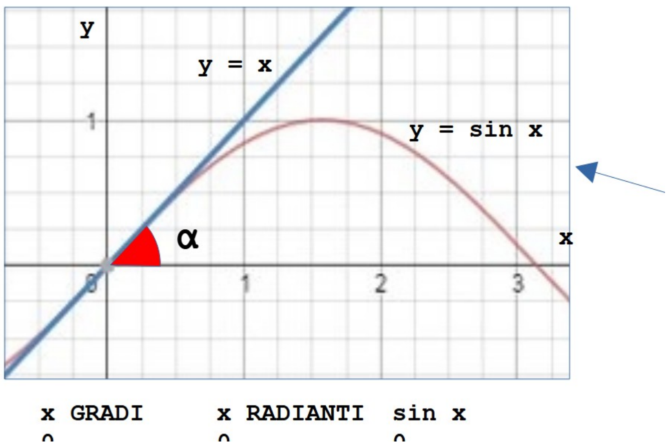


fig.8 - Funzioni $y = \sin x$ *e* $y = x$ *per* $x \to 0$

si vede facilmente che le due funzioni partono dall'origine con lo stesso angolo di 45^o :

$$y = \sin x \;\to\; y' = \cos x \;\to\; y'(0) = 1 = arctg\,45^o$$

$$y = x \;\to\; y' = 1 \;\to\; y'(0) = 1 = arctg\,45^o$$

Appendice 4: La velocità tangenziale all'orbita ellittica

Per ricavare la formula della velocità tangenziale V di un corpo su un'orbita ellittica si può partire dall'energia totale E_T del corpo: l'energia meccanica totale (in assenza di attriti) è data dalla somma dell'energia cinetica E_C e dell'energia potenziale gravitazionale E_P del corpo.

$$E_T = E_C + E_P$$

Per i principi di conservazione l'energia totale E_T di un corpo si mantiene costante nel tempo

$$E_T = E_C + E_P = cost.$$

Nel caso di un satellite in orbita ellittica attorno alla Terra, l'energia totale del satellite sarà dunque uguale al *perielio* e all'*afelio*:

$$E_{Tp} = E_{Ta}$$

Per dedurre l'energia cinetica E_C si può partire dal **II Principio della Dinamica**:

> "*La forza applicata ad un punto materiale è pari alla derivata della quantità di moto p del punto stesso rispetto al tempo t*"

$$F = \frac{dp}{dt}$$

dove la quantità di moto p è

$$p = mv$$

(m = massa del corpo, v = velocità del corpo).
Si ha:

$$F = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma$$

dove a è l'accelerazione.

L'energia cinetica infinitesima del corpo corrisponde al lavoro necessario a spostare il corpo di massa $\boldsymbol{m}$ di una lunghezza infinitesima $\boldsymbol{dx}$

$$dL = F\,dx = m\frac{dv}{dt} \times dx = m\,dv \times (\frac{dx}{dt})$$

$$dL = m\,v \times dv$$

integrando rispetto alla velocità si ottiene l'energia cinetica o "vis-viva" (Leibniz, 1676):

$$E_C = \int dL = \int m\,v \times dv = m\int v \times dv = \frac{1}{2}m\,v^2$$

Per l'energia potenziale E_P si ha che il corpo di massa $\boldsymbol{m}$ a distanza $\boldsymbol{r}$ dalla Terra (di massa $\boldsymbol{M}$) si attraggono per la legge di gravitazione universale (Newton, 1687) con una forza:

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

dove $G = 6{,}6743\ \frac{m^3}{(Kg\,x\,s^2)}$ è la costante di gravitazione universale (Cavendish, 1798).
L'energia potenziale E_P di un corpo di massa $\boldsymbol{m}$ a distanza $\boldsymbol{r}$ dalla Terra sarà data dalla forza di attrazione terrestre $\boldsymbol{F}$ moltiplicata per la distanza $\boldsymbol{r}$ (altezza dalla superficie terrestre):

$$E_P = -G\frac{mM}{r^2} \times r = -G\frac{mM}{r}$$

è negativa perché il lavoro che si deve compiere per allontanare i due corpi e' opposto alla forza di gravitazione universale. L'energia totale del corpo sarà:

$$E_T = E_C + E_P = \frac{1}{2}m\,v^2 + (-G\frac{mM}{r})$$

Tornando all'energia totale del satellite in orbita ellittica attorno alla Terra, al *perielio* e all'*afelio*:

$$E_{Tp} = E_{Ta}$$

sostituendo

$$E_{Tp} = \frac{1}{2}mv_p^2+(-G\frac{mM}{r_p})$$
$$E_{Ta} = \frac{1}{2}mv_a^2+(-G\frac{mM}{r_a})$$

si ha:

$$\frac{1}{2}mv_p^2+(-G\frac{mM}{r_p}) = \frac{1}{2}mv_a^2+(-G\frac{mM}{r_a})$$

dove
v_p = velocità al *perielio*
v_a = velocità all'*afelio*
r_p = distanza dalla Terra al *perielio*
r_a = distanza dalla Terra all'*afelio*

$$\frac{1}{2}v_p^2+(-G\frac{M}{r_p}) = \frac{1}{2}v_a^2+(-G\frac{M}{r_a})$$

indipendenza dalla massa m del satellite

$$+(G\frac{M}{r_a})+(-G\frac{M}{r_p}) = \frac{1}{2}v_a^2-\frac{1}{2}v_p^2$$

$$GM(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_p}) = \frac{1}{2}(v_a^2-v_p^2)$$

$$GM\frac{(r_p-r_a)}{(r_a r_p)} = (\frac{1}{2}v_a^2)(1-\frac{v_p^2}{v_a^2})$$

Per la II Legge di Keplero o della *conservazione del momento angolare*

$$v_p \times r_p = v_a \times r_a$$

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p}$$

sostituendo

$$GM\frac{(r_p-r_a)}{(r_a r_p)} = (\frac{1}{2}v_a^2)(1-\frac{r_a^2}{r_p^2})$$

$$GM\frac{(r_p-r_a)}{(r_a r_p)} = (\frac{1}{2}v_a^2)\frac{(r_p^2-r_a^2)}{r_p^2}$$

$$\frac{1}{2}v_a^2 = GM\frac{(r_p-r_a)}{(r_a r_p)}\frac{r_p^2}{(r_p^2-r_a^2)}$$

$$\frac{1}{2}v_a^2 = GM\frac{r_p}{r_a}\frac{1}{(r_p+r_a)}$$

dalle proprietà dell'ellisse (vedi ***Appendice 1***) l'asse maggiore dell'ellisse è:

$$r_p+r_a = 2a$$

$$r_p = 2a-r_a$$

sostituendo

$$\frac{1}{2}v_a^2 = GM\frac{(2a-r_a)}{r_a}\frac{1}{(2a)}$$

$$\frac{1}{2}v_a^2 = GM(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{(2a)})$$

$$\frac{1}{2}v_a^2-GM(\frac{1}{r_a}) = -GM(\frac{1}{(2a)}) = \text{cost.}$$

l'energia totale dipende solo dalla dimensione dell'orbita $(2a)$ e dalla massa della Terra M . Dunque la relazione è valida in qualunque punto dell'ellisse:

$$\frac{1}{2}v^2-GM(\frac{1}{r}) = -GM(\frac{1}{(2a)})$$

indicando con

$\mu = GM$ costante gravitazionale della Terra

dove

$G = 6{,}6743 \times 10^{-11} \left(\frac{m^3}{(kg \times s^2)}\right)$
costante gravitazionale universale

$M = 5{,}9726 \times 10^{24} \ (kg)$
massa della Terra

$\mu = (6{,}6743 \times 10^{-11}) \times (5{,}9726 \times 10^{24}) = (39{,}86 \times 10^{13}) \left(\frac{m^3}{s^2}\right) = 39{,}86 \times 10^4 \left(\frac{km^3}{s^2}\right)$

$\mu = 398600{,}5 \ \frac{(Km)^3}{s^2} = 398600{,}5 \times 0{,}157426214 \ \frac{(n.mi.)^3}{s^2} = 62751 \ \frac{(n.mi.)^3}{s^2}$

(vedi ***Appendice 2***).
Sostituendo:

$$\frac{1}{2} v^2 - GM\left(\frac{1}{r}\right) = -GM\left(\frac{1}{(2a)}\right)$$

$$\frac{1}{2} v^2 - \mu\left(\frac{1}{r}\right) = -\mu\left(\frac{1}{(2a)}\right)$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{(2a)}\right)$$

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

si ottiene la formula fondamentale dell'astrodinamica

$$v = \sqrt{\left(\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\right)} \ (n.mi./s)$$

usata nel *Program 1* della NASA.

Appendice 5: Il coseno del flight-path angle $\cos\gamma_2$

Per ottenere il coseno del nuovo *flight-path angle* $\cos\gamma_2$ è necessario partire dalle proprietà dell'ellisse, in particolare la "proprietà riflettente" (vedi fig.9)

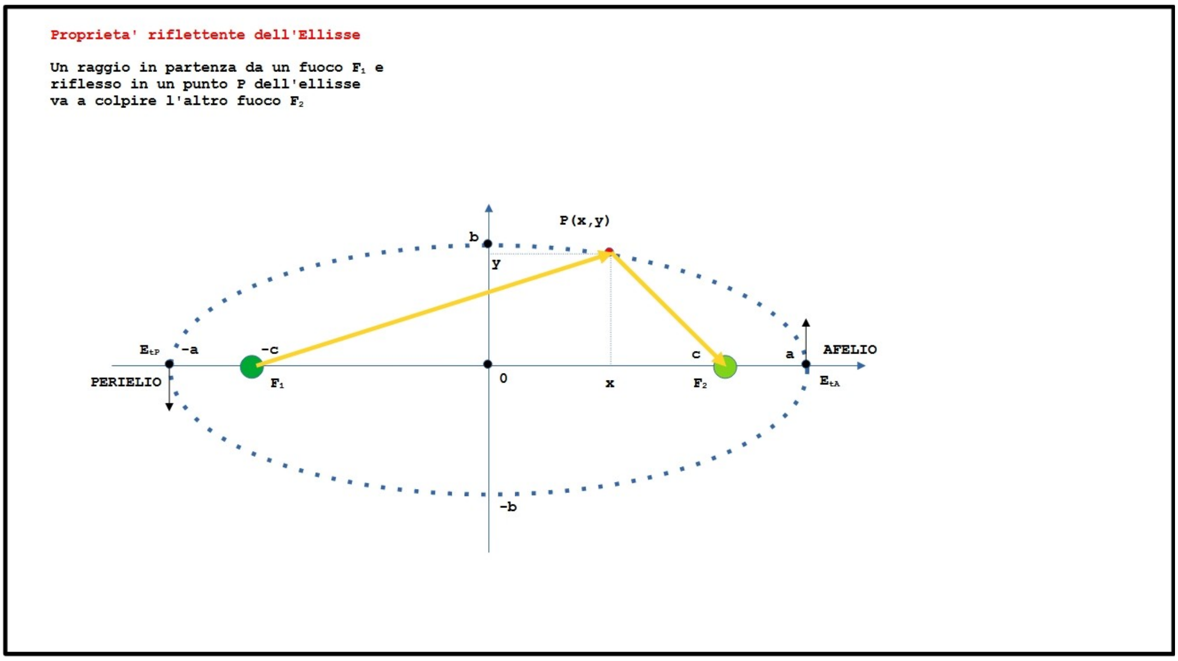


fig.9a - Proprietà riflettente dell'ellisse

una proprietà ad esempio usata negli auditorium: i raggi che partono da un fuoco e riflessi dall'ellisse colpiscono sempre l'altro fuoco. Nel seguito la dimostrazione.

Sia $\boldsymbol{F^{II}}$ un punto sulla prosecuzione del segmento $\overline{\boldsymbol{PF_1}}$ tale che

$$\overline{\boldsymbol{PF^{II}}} = \overline{\boldsymbol{PF_2}}$$

allora il triangolo $\boldsymbol{F_2 P F^{II}}$ è isoscele per costruzione.

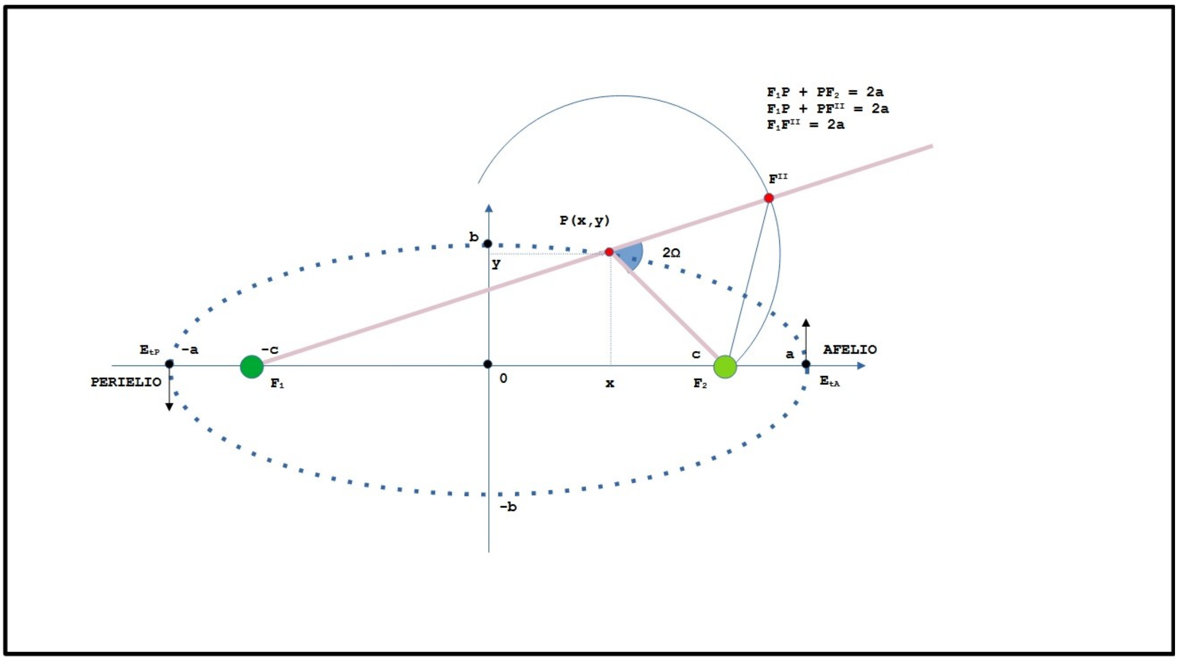


fig.9b - Proprietà riflettente dell'ellisse

Sia ***BIS*** la retta bisettrice dell'angolo $\mathbf{2}\Omega$ al vertice ***P*** del triangolo isoscele $\boldsymbol{F_2 P F^{II}}$.

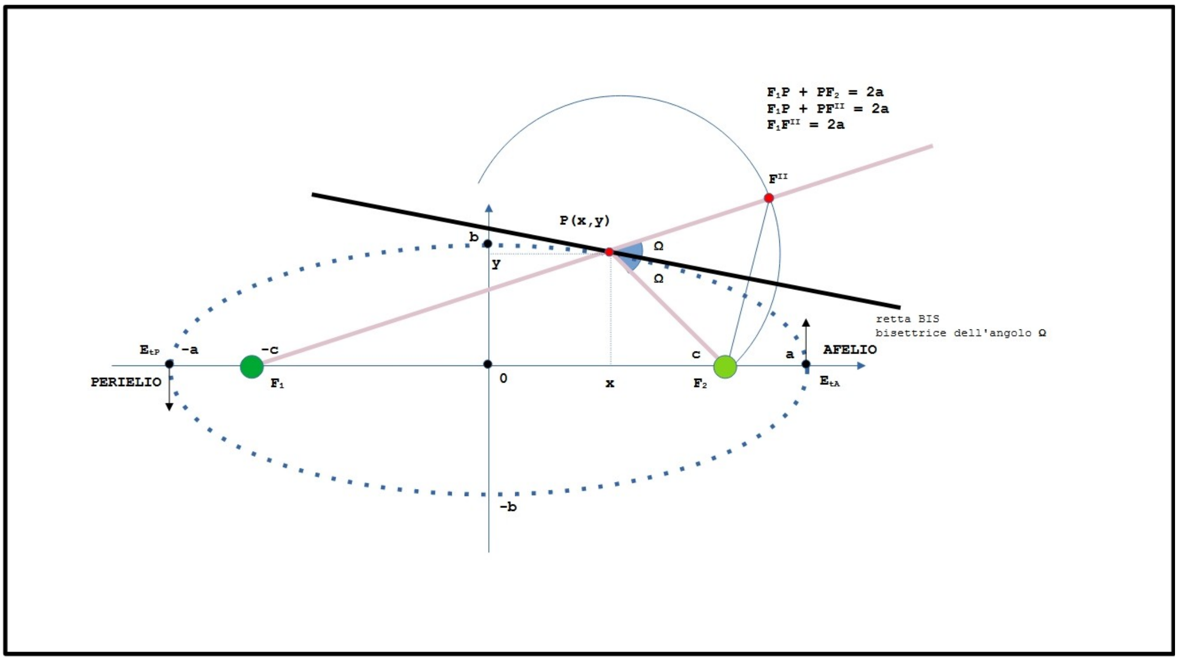


fig.9c - Proprietà riflettente dell'ellisse

Allora la retta ***BIS*** divide anche il segmento $\overline{(F_2 F^{II})}$ in due parti uguali:

$$\overline{(F_2 G)} = \overline{(G F^{II})}$$

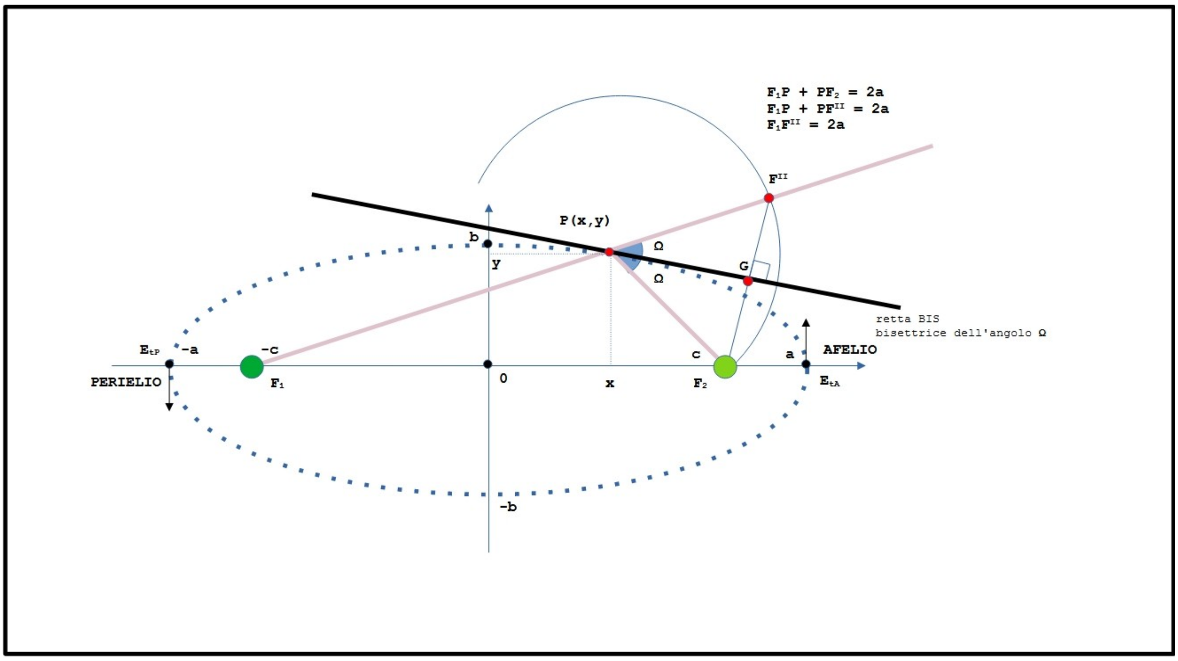


fig.9d - Proprietà riflettente dell'ellisse

Sia $\boldsymbol{Q}$ un punto qualsiasi sulla retta bisettrice ***BIS*** , risulta

$$\overline{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}_2)} = \overline{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^{II})}$$

sommando $\overline{(\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{Q})}$ a entrambe i membri

$$\overline{(\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{Q})}+\overline{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}_2)} = \overline{(\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{Q})}+\overline{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^{II})}$$

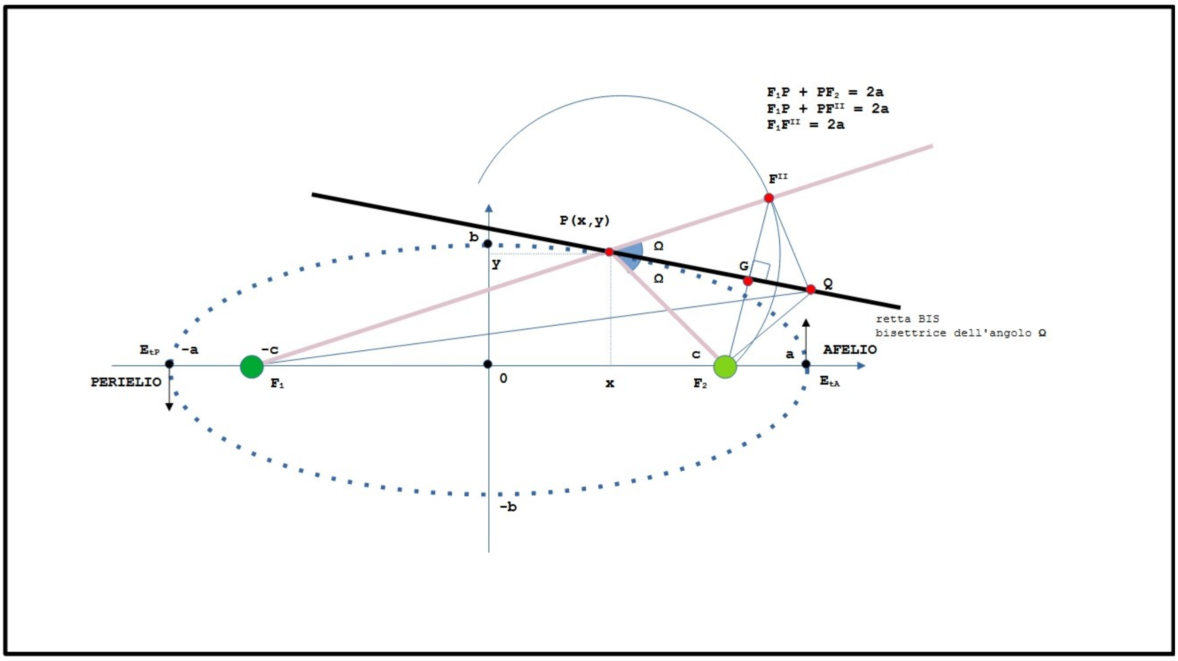


fig.9e - Proprietà riflettente dell'ellisse applicando la disuguaglianza triangolare al triangolo $\boldsymbol{F_1 Q F^{II}}$

$$\overline{(F_1 Q)} + \overline{(Q F^{II})} > \overline{(F_1 F^{II})}$$

ma $\overline{(F_1 F^{II})} = 2a$ quindi

$$\overline{(F_1 Q)} + \overline{(Q F^{II})} > 2a$$

ma $\overline{(Q F^{II})} = \overline{(Q F_2)}$ quindi

$$\overline{(F_1 Q)} + \overline{(Q F_2)} > 2a$$

la distanza del punto $\boldsymbol{Q}$ dai due fuochi è sempre maggiore di $\boldsymbol{2a}$

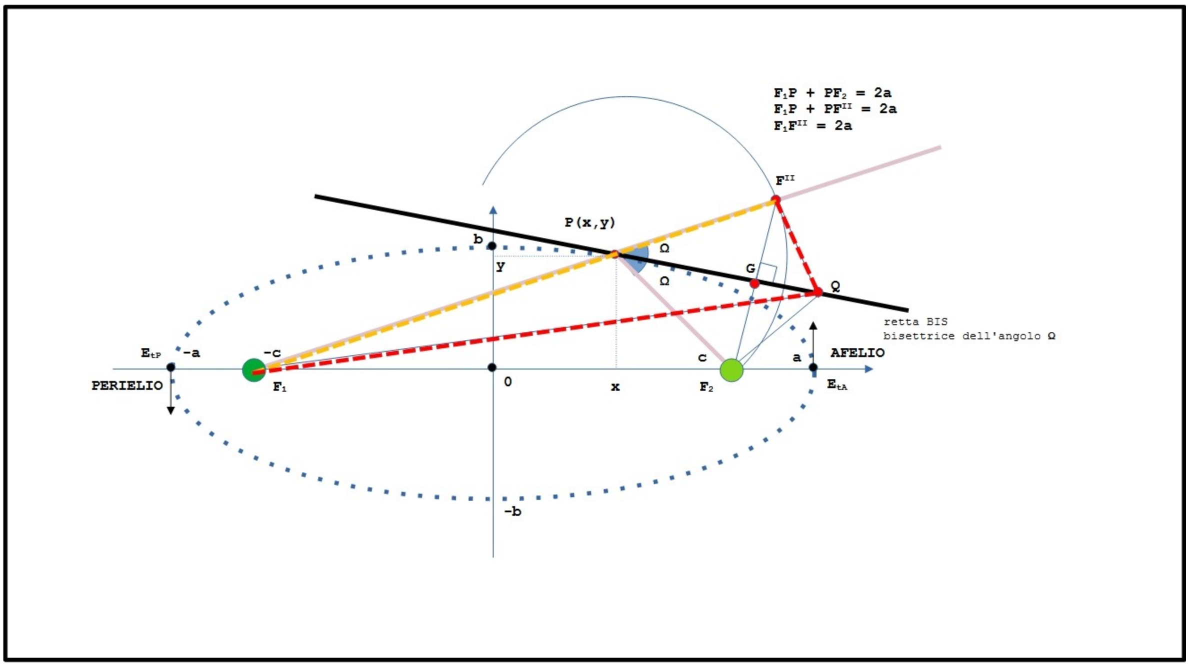


fig.9f - Proprietà riflettente dell'ellisse

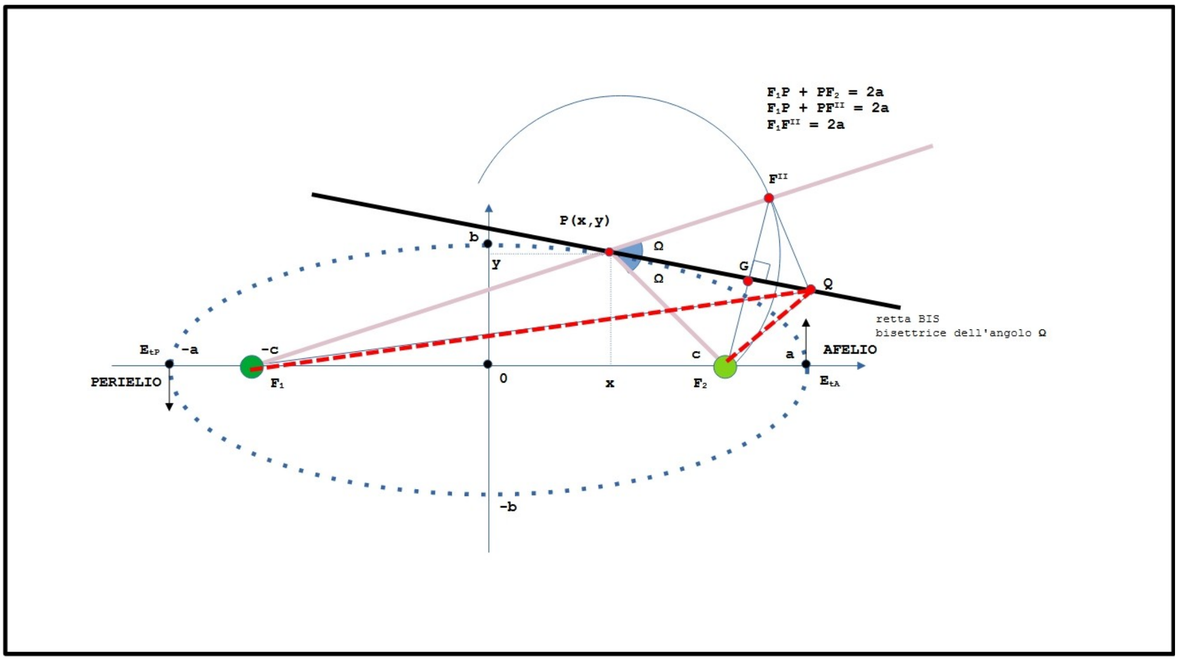


fig.9g - Proprietà riflettente dell'ellisse

Dunque ***Q*** non appartiene all'ellisse: la bisettrice ***BIS*** ha solo un punto in comune col l'ellisse, il punto ***P*** dove è tangente all'ellisse.

In ogni punto $\boldsymbol{P}$ dell'ellisse la retta tangente in $\boldsymbol{P}$ è anche la bisettrice dell'angolo formato dalla prosecuzione del raggio tra il fuoco $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{P}$ e l'altro raggio tra il punto $\boldsymbol{P}$ e l'altro fuoco $\boldsymbol{F_2}$.

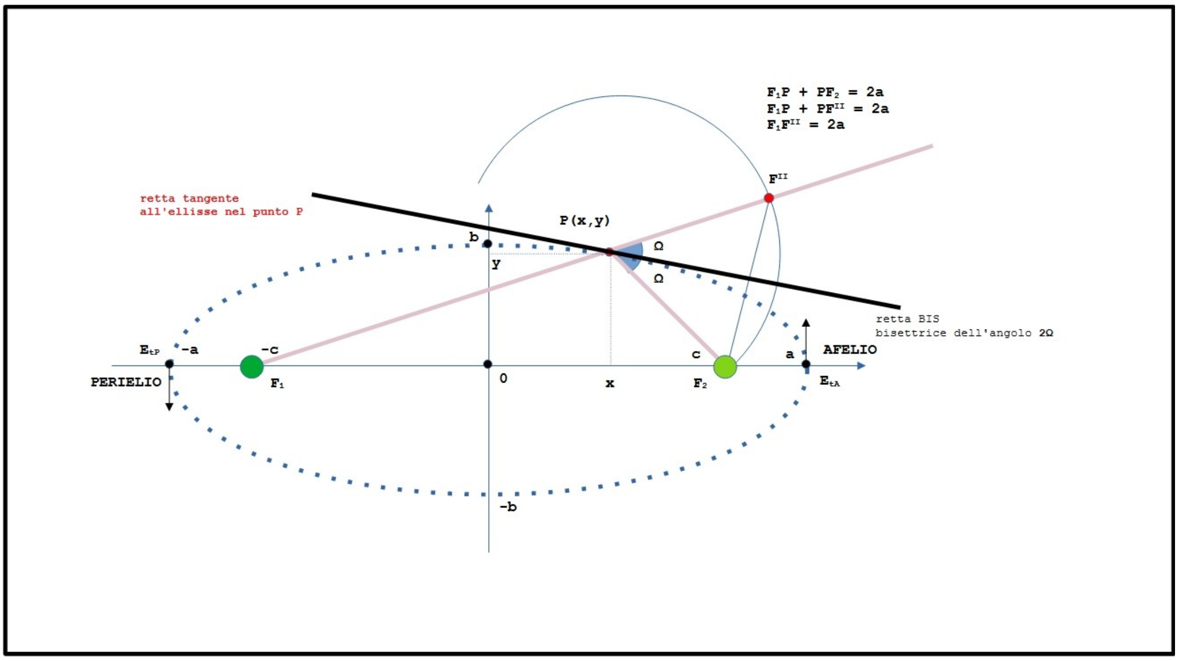


fig.9h - Proprietà riflettente dell'ellisse

Per simmetria questo è vero anche per l'altro fuoco: in ogni punto $\boldsymbol{P}$ dell'ellisse la retta tangente in $\boldsymbol{P}$ è anche la bisettrice dell'angolo formato dalla prosecuzione del raggio tra il fuoco $\boldsymbol{F_2}$ e $\boldsymbol{P}$ e l'altro raggio tra il punto $\boldsymbol{P}$ e l'altro fuoco $\boldsymbol{F_1}$.

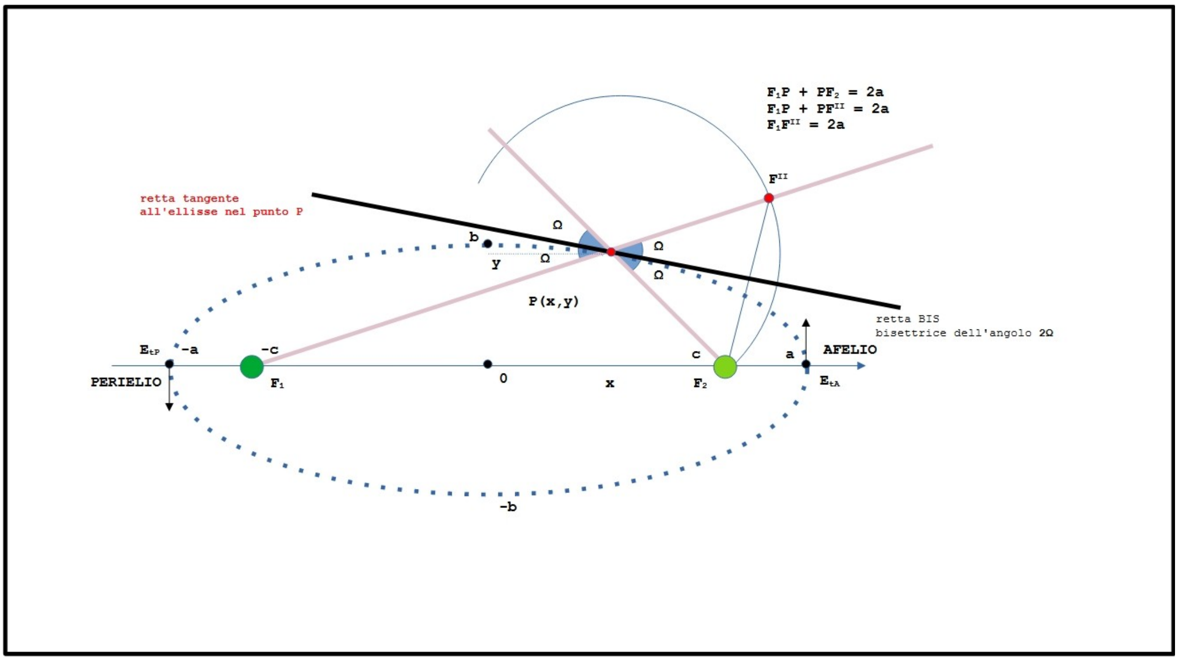


fig.9i - Proprietà riflettente dell'ellisse

Dunque l'angolo formato dal raggio $\overline{(\boldsymbol{F_1 P})}$ che parte dal fuoco $\boldsymbol{F_1}$ e colpisce l'ellisse nel punto $\boldsymbol{P}$ forma un angolo $\boldsymbol{\Omega}$ con la retta tangente all'ellisse in $\boldsymbol{P}$ **uguale** all'angolo che forma il raggio $\overline{(\boldsymbol{P F_2})}$ che parte da $\boldsymbol{P}$ e va verso il fuoco $\boldsymbol{F_2}$.

Questo significa che il raggio $\overline{(\boldsymbol{F_1 P})}$ che parte da $\boldsymbol{F_1}$ colpisce la retta tangente in $\boldsymbol{P}$ e viene **riflesso** verso $\boldsymbol{F_2}$. Per la *legge di riflessione* (Cartesio, 1637; Ibn Sahl, 984) l'**angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione**.

Se ora si traccia la normale alla retta tangente in $\boldsymbol{P}$ si vede essa che sarà la bisettrice dell'angolo $\boldsymbol{2\gamma}$ formato dai due raggi in $\boldsymbol{P}$. Infatti l'angolo $\boldsymbol{\gamma}$ formato dal raggio $\overline{(\boldsymbol{F_1 P})}$ e la retta ortogonale alla tangente in $\boldsymbol{P}$ è uguale all'angolo $\boldsymbol{\gamma}$ formato dal raggio $\overline{(\boldsymbol{F_2 P})}$ e la retta normale alla tangente. In altre parole la retta ortogonale alla tangente in $\boldsymbol{P}$ è la bisettrice di un angolo pari a $\boldsymbol{2\gamma}$.

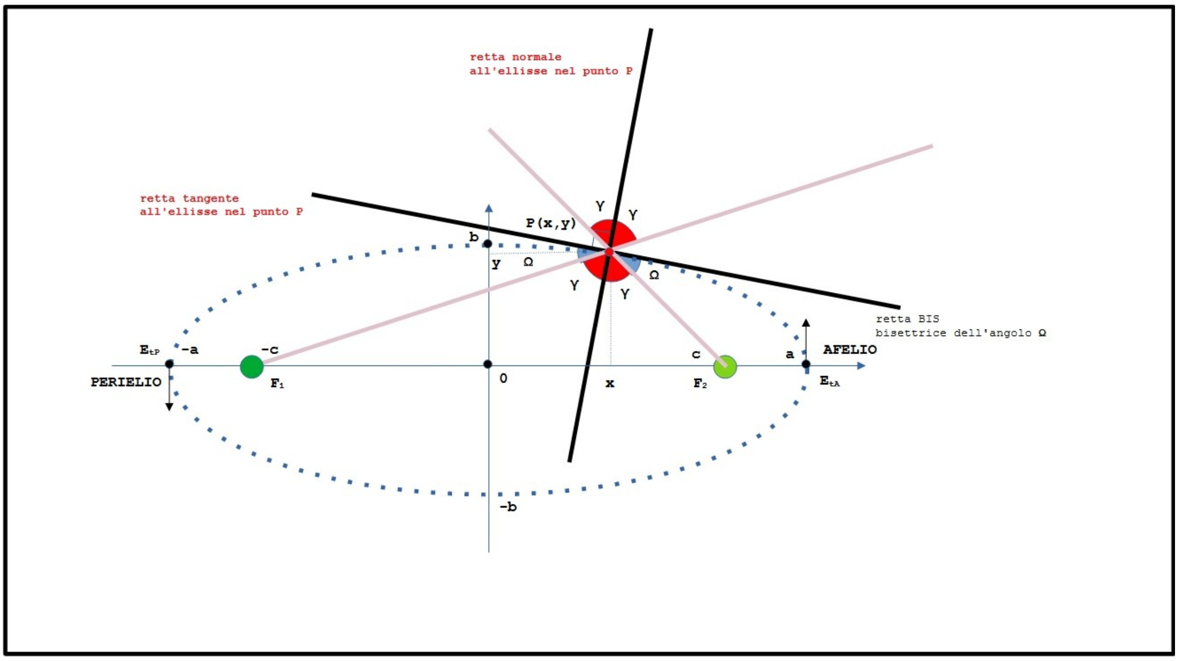


fig.9j - Proprietà riflettente dell'ellisse

Se ora si ruotano di un angolo esattamente pari a $\boldsymbol{\gamma}$ la retta tangente e la retta ortogonale si ottiene

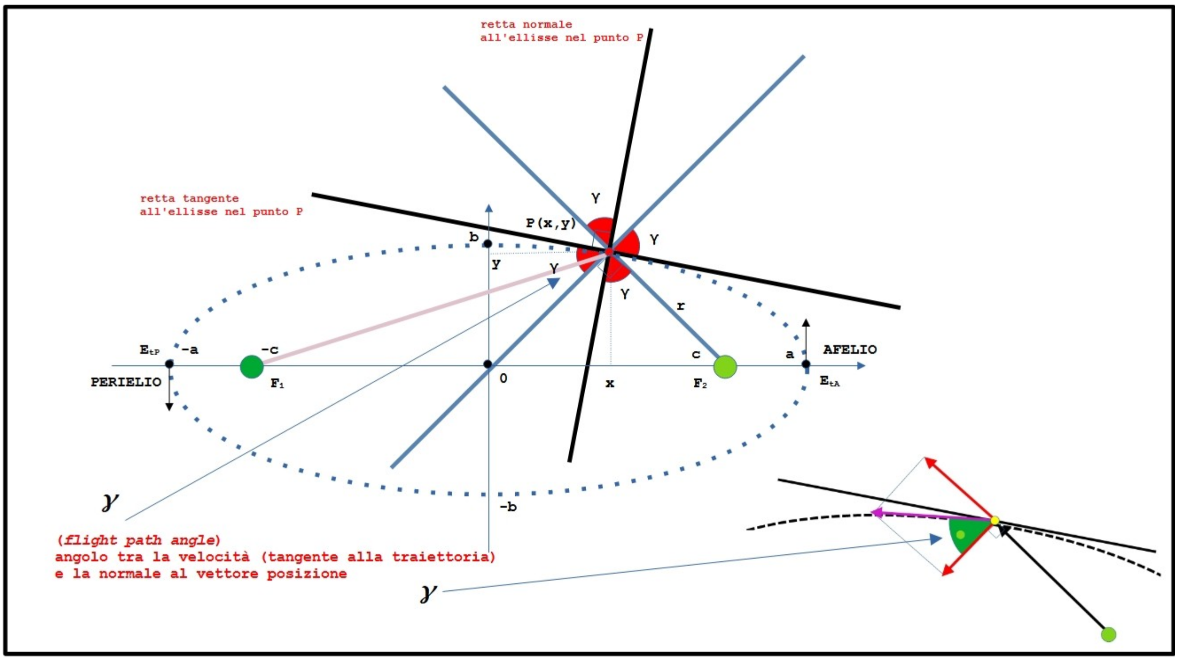


fig.10a - Calcolo del flight-path angle

si vede chiaramente che l'angolo $\boldsymbol{\gamma}$ formato dalla tangente e la retta ortogonale al raggio $\overline{(\boldsymbol{F_2P})}$ è uguale all'angolo $\boldsymbol{\gamma}$ formato dalla retta ortogonale alla tangente e il raggio stesso.

L'angolo tra la retta tangente alla traiettoria (direzione della velocità del satellite) e la normale al raggio è proprio l'angolo di volo, il *flight -path angle*!

Quanto vale $\boldsymbol{\gamma}$?

Per calcolare γ basta applicare il *teorema del coseno* (Al-Kashi, 1406; Carnot, 1797):

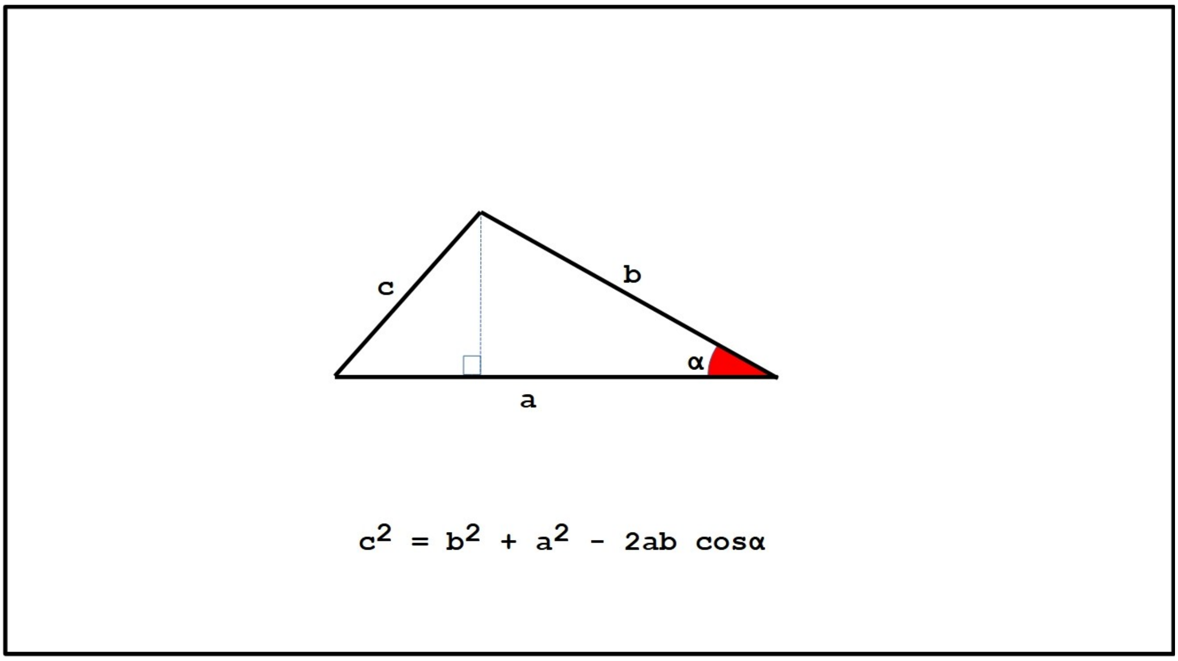


fig.10b - Calcolo del flight-path angle

Per qualsiasi triangolo, preso l'angolo α e i due lati adiacenti a e b, il quadrato del lato c opposto all'angolo α è dato da:

$$c^2 = (b\, sen\, \alpha)^2 + (a - b \cos \alpha^2)$$

$$c^2 = b^2 sen^2 \alpha + a^2 + b^2 \cos^2 \alpha - 2\, ab \cos \alpha$$

$$c^2 = b^2 (sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + a^2 - 2\, ab \cos \alpha$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2\, ab \cos \alpha$$

Applicando il teorema del coseno al triangolo $F_1 P F_2$

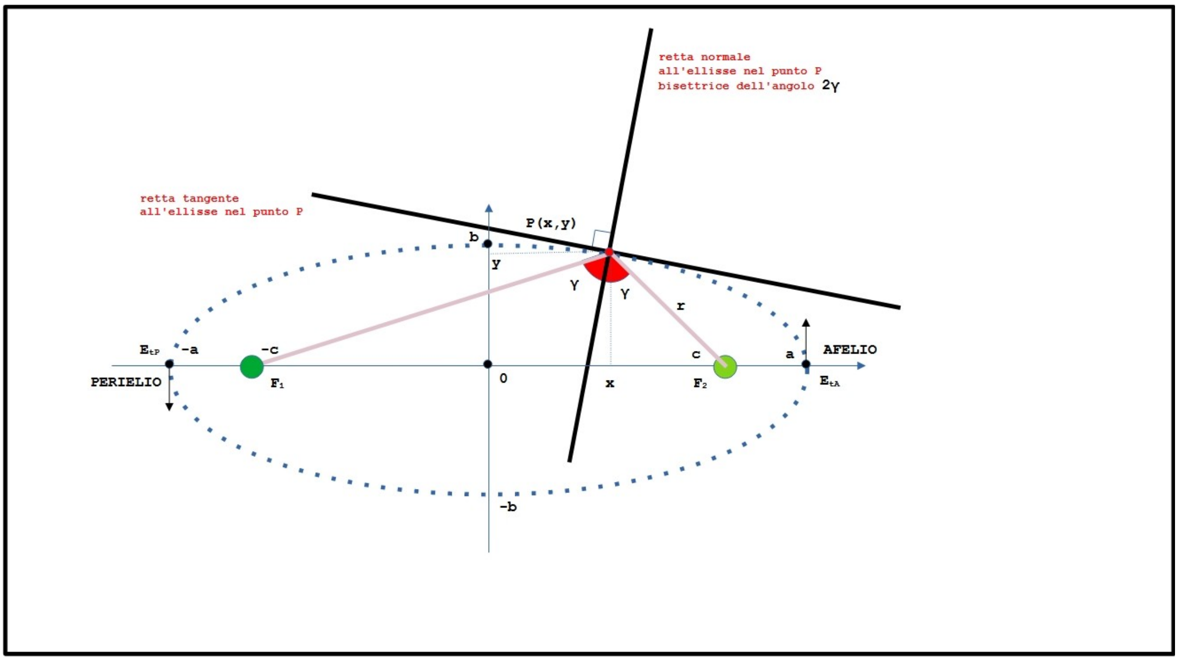


fig.10c - Calcolo del flight-path angle

$$\overline{(F_1 F_2)}^2 = \overline{(F_1 P)}^2 + \overline{(F_2 P)}^2 - 2\times\overline{(F_1 P)}\,\overline{(F_2 P)}\cos(2\gamma)$$

dalle proprietà dell'ellisse la distanza tra i due fuochi è

$$\overline{(F_1 F_2)} = 2c = 2ae$$

dove a è il semiasse maggiore dell'ellisse ed e è l'eccentricità.
Indicando con r la distanza del punto P dal fuoco F_2

$$\overline{(F_2 P)} = r$$

la distanza del punto P dal fuoco F_1 è

$$\overline{(F_1 P)} = (2a-r)$$

sostituendo si ha:

$$(2ae)^2 = (2a-r)^2 + r^2 - 2(2a-r)r\cos(2\gamma)$$

$$2(2a-r)r\cos(2\gamma) = -4a^2e^2+4a^2+r^2-4ar+r^2$$

$$(2a-r)r\cos(2\gamma) = -2a^2e^2+2a^2+r^2-2ar$$

$$(2a-r)r\cos(2\gamma) = +2a^2-2a^2e^2-2ar+r^2$$

$$(2a-r)r\cos(2\gamma) = 2a^2(1-e^2)-r(2a-r)$$

$$\cos(2\gamma) = \frac{(2a^2(1-e^2)-r(2a-r))}{((2a-r)r)}$$

$$\cos(2\gamma) = 2\frac{(a^2(1-e^2))}{((2a-r)r)}-1$$

applicando le proprietà trigonometriche:

$$\cos(\beta+\omega) = \cos\beta\cos\omega-sen\,\beta\,sen\,\omega$$
$$\cos(\omega+\omega) = \cos\omega\cos\omega-sen\,\omega\,sen\,\omega$$
$$\cos(2\omega) = \cos^2\omega-(1-\cos^2\omega)$$
$$\cos(2\omega) = 2\cos^2\omega-1$$

si ha:

$$2\cos^2\gamma-1 = 2\frac{(a^2(1-e^2))}{((2a-r)r)}-1$$

$$\cos^2\gamma = \frac{(a^2(1-e^2))}{((2a-r)r)}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{(\frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)})}$$

si arriva finalmente all'espressione di $\cos\gamma$, formula fondamentale dell'astrodinamica usata nel *Program 1* della NASA.

Bibliografia

- Brooks C.G., J.M. Grimwood, L.S. Swenson (1979). *Chariots for Apollo: A History of Manned Lunar Spacecraft*, NASA Special Publication-4205, NASA History Series, 1979.

- Miller S.L., Griffith D.J. (1968, January 30). *Methods for determining the orbital transfer requirements*, National Aeronautics and Space Administration (NASA), Mission Planning and Analysis Division, Orbital Mission Analysis Branch, MSC INTERNAL NOTE NO. 68-FM-25, Manned Spacecraft Center, Houston, Texas.

- NASA (2010). *About Margaret Hamilton. A scientific study of the problems of digital engineering for space flight systems, with a view to their practical solution*, Office of Logic Design, NASA.

- Olivetti (1965). *Manuale di programmazione, Programma 101.*

- Perotto, P.G. (2015). *P101. Quando l'Italia inventò il personal computer,* Edizioni di Comunità.

- WSJ (1965, 15 October). Desk-top size computer is being sold by Olivetti for first time in US, *Wall Street Journal*.